*Й. Микеш, С.Е. Степанов, И.И. Цыганок*

Теормы разложения конформно килинговых форм
на тотально омбилических подмногообразиях

Доказываются теоремы о разложении конформно киллинговой $r$-формы в ортогональную сумму киллинговой и замкнутой конформно киллинговой $r$-форм на вполне омбилических поверхностях $n$-мерного риманова многообразия ($r = 1, \ldots, n — 1$).

УДК 514.76

***Н.Д. Никитин, О.Г. Никитина***

*Пензенский государственный университет*

## Инфинитезимальные преобразования аффинной связности касательного расслоения пространства нелинейной связности

В работе показано, что полный лифт $X^C$ инфинитезимального преобразования $X$ дифференцируемого многообразия $M$ оставляет инвариантным аффинную связность касательного расслоения $T(M)$ пространства нелинейной связности тогда и только тогда, когда векторное поле $X$ является инфинитезимальным движением в пространстве нелинейной связности.

***Ключевые слова:*** касательное расслоение, нелинейная связность, полный лифт векторного поля, производная Ли, инфинитезимальное аффинное движение.

Пусть $M$ — $n$-мерное дифференцируемое многообразие, $T(M)$ — касательное расслоение, $\pi$: $T(M) \to M$ — каноническая проекция, $G = R \setminus \{0\}$ группа Ли относительно операции умножения, действующая на касательном расслоении по закону: для любого $a \in G$ преобразование $R_a : T(M) \to T(M)$ отображает произвольный элемент $z \in T(M)$ в $R_a(z) = az$, где

$z=\left(x,\overline{b}\right)$, $az=\left(x,a\overline{b}\right)$, $\overline{b}\in T_x$. Обозначим через *T'*(*M*) подрасслоение *T*(*M*), состоящее из всех ненулевых векторов, касательных к *M*.

**Определение**. *Дифференцируемое распределение H, заданное на T'(M) и удовлетворяющее для любого* $z\in T'(M)$ *и* $a\in G$ *условиям [1]:*

$$a)\,T_z=H_z\oplus Q_z\,,\quad b)\,dR_a\left(H_z\right)=H_{R_a(z)}\,,$$

*где* $Q_z$ *— касательное векторное пространство к слою* $F_p^{'}=\pi^{-1}(p)$, $p=\pi(z)$, *называется нелинейной связностью* $\overline{\nabla}$ *на многообразии M.*

Пусть $\left(U,x^i\right)$, $i=\overline{1,n}$, — локальная карта многообразия *M*. Нелинейная связность $\overline{\nabla}$ в естественных координатах $(x^A)$, $A=\overline{1,2n}$ окрестности $\pi^{-1}(U)$ имеет компоненты $H_i^h\left(x^1,x^2,\ldots,x^n,x^{n+1},\ldots,x^{2n}\right)$, $i,h=\overline{1,n}$, однородные первой степени относительно слоевых координат $x^{n+1},x^{n+2},\ldots,x^{2n}$. Обозначим через $L_r$ алгебру Ли эффективной группы преобразований $G_r$, оставляющей инвариантной нелинейную связность $\overline{\nabla}$. Для каждого $X\in L_r$ $L_{X^C}\overline{\nabla}=0$, где $L_{X^C}$ обозначение производной Ли относительно полного лифта $X^C$ векторного поля *X*.

Условие инвариантности нелинейной связности $\overline{\nabla}$ относительно производной Ли вдоль векторного поля $X^C$, $X\in L_r$, подробно запишется в виде

$$\partial^2_{\sigma i}\xi^h x^{n+\sigma}-\partial_\sigma\xi^h H_i^\sigma+H^h_{i\cdot\sigma}\partial_m\xi^\sigma x^{n+m}+\xi^\sigma\partial_\sigma H_i^h=0 \qquad (1)$$

$$(i,h,m,\sigma=\overline{1,n}).$$

В выражении (1) $H^h_{i\cdot\sigma}=\dfrac{\partial H_i^h}{\partial x^{n+\sigma}}$, $\xi^h$ — компоненты векторного поля *X* в локальной карте $\left(U,x^i\right)$.

По нелинейной связности $\overline{\nabla}$ на многообразии $M$ построим аффинную связность $\Gamma(\Gamma^A_{BC})$ на касательном расслоении $T(M)$ по закону

$$\Gamma^h_{ji} = H^h_{j\cdot i},\ \Gamma^h_{n+j\,i} = \Gamma^h_{j\,n+i} = \Gamma^h_{n+j\,n+i} = \Gamma^{n+h}_{n+j\,n+i} = 0,$$

$$\Gamma^{n+h}_{j\,n+i} = \Gamma^{n+h}_{n+j\,i} = H^h_{j\cdot i},\ \Gamma^{n+h}_{ji} = x^{n+\sigma}\delta_\sigma H^h_{j.i},$$

$$\delta_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} - H^\tau_\sigma \frac{\partial}{\partial x^{n+\tau}}\ (i,j,h,\sigma,\tau = \overline{1,n}).$$

Тензор кручения $T$ аффинной связности $\Gamma(\Gamma^A_{BC})$ отличен от нуля.

Инфинитезимальное преобразование $\overline{X}$ касательного расслоения $T(M)$ является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве ($T(M)$, $\Gamma$), если $L_{\overline{x}}\Gamma = 0$, где $L_{\overline{x}}$ — производная Ли вдоль векторного поля $\overline{X}$. Запишем подробно уравнения инфинитезимального движения

$$\overline{X} = \eta^A(x^1,\cdots,x^{2n})\frac{\partial}{\partial x^A}$$

касательного расслоения со связностью $\Gamma(\Gamma^A_{BC})$:

$$\frac{\partial^2\eta^A}{\partial x^B\partial x^C} - \frac{\partial\eta^A}{\partial x^D}\Gamma^D_{BC} + \frac{\partial\eta^D}{\partial x^B}\Gamma^A_{DC} + \frac{\partial\eta^D}{\partial x^C}\Gamma^A_{BD} + \eta^D\frac{\partial\Gamma^A_{BC}}{\partial x^D} = 0 \qquad (2)$$

$$(A,B,C,D = \overline{1,2n}).$$

Для инфинитезимальных аффинных движений касательного расслоения $T(M)$ со связностью $\Gamma$ справедлива

**Теорема**. *Полный лифт* $X^C$ *векторного поля X многообразия M является инфинитезимальным аффинным движением касательного расслоения T'(M) со связностью Γ тогда и только тогда, когда векторное поле X оставляет инвариантным нелинейную связность* $\overline{\nabla}$.

*Доказательство*. Пусть

$$X^C = \xi^i(x^1,\cdots,x^n)\frac{\partial}{\partial x^i} + x^{n+\sigma}\partial_\sigma\xi^i\frac{\partial}{\partial x^{n+i}}\ —$$

полный лифт векторного поля $X = \xi^i (x^1, \cdots, x^n) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, заданного на многообразии $M$, является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве ($T(M)$, $\Gamma$). Тогда компоненты векторного поля $X^C$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2). При $A, B, C = \overline{1, n}$ из уравнений (2) получим, что компоненты векторного поля $X$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\partial^2_{ji}\xi^h - \partial_\sigma \xi^h H^\sigma_{j\cdot i} + \partial_j \xi^\sigma H^h_{\sigma i} + \partial_i \xi^\sigma H^h_{j\cdot\sigma} + \xi^\sigma \partial_i H^h_{j\cdot\sigma} = 0 \qquad (3)$$

$$(i, j, h, \sigma = \overline{1, n}).$$

Если умножим обе части каждого уравнения в (3) соответственно на $x^{n+i}$ и просуммируем по индексу $i$, то получим, что компоненты векторного поля $X = \xi^i (x^1, \cdots, x^n) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1). Инфинитезимальное преобразование $X$ оставляет инвариантным нелинейную связность $\overline{\nabla}$.

Пусть теперь векторное поле $X = \xi^i (x^1, \cdots, x^n) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ оставляет инвариантным нелинейную связность $\overline{\nabla}$, тогда компоненты поля $X$ удовлетворяют системе (1). Докажем, что $X^C$ инфинитезимальное аффинное движение в пространстве ($T(M)$, $\Gamma$). Запишем подробно производную Ли $L_{X^C}\Gamma^A_{BC}$ объекта аффинной связности $\Gamma$ при следующих значениях индексов $A$, $B$, $C$:

*а*) $A, B, C = \overline{1, n}$; *б*) $A = \overline{n+1, 2n}$, $B, C = \overline{1, n}$; *в*) $A, C = \overline{n+1, 2n}$, $B = \overline{1, n}$; *г*) $A, B = \overline{n+1, 2n}$, $C = \overline{1, n}$.

Имеем

*а*) $$L_{X^C}\Gamma^h_{ji} = \partial^2_{ji}\xi^h - \partial_\sigma \xi^h H^\sigma_{j\cdot i} + \partial_j \xi^\sigma H^h_{\sigma\cdot i} + \partial_i \xi^\sigma H^h_{j\cdot\sigma} +$$
$$+ H^h_{j\cdot i\cdot\sigma}\partial_m \xi^\sigma x^{n+m} + \xi^\sigma \partial_\sigma H^h_{j\cdot i};$$

$$б)\ L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{ji} = \partial^3_{jim}\xi^h x^{n+m} - \partial^2_{\rho m}\xi^h x^{n+m} H^{\rho}_{j\cdot i} -$$
$$-\partial_\rho \xi^h \delta_\sigma H^{\rho}_{j\cdot i} x^{n+\sigma} + \partial^2_{jm}\xi^\rho x^{n+m} H^h_{\rho\cdot i} + \partial^2_{im}\xi^\rho x^{n+m} H^h_{j\cdot\rho} +$$
$$+\partial_j \xi^\rho \delta_\sigma H^h_{\rho\cdot i} x^{n+\sigma} + \partial_i \xi^\rho \delta_\sigma H^h_{j\cdot\rho} x^{n+\sigma} + \xi^\rho \partial_\rho(\delta_\sigma H^h_{j\cdot i}) x^{n+\sigma} +$$
$$+\partial_m \xi^\rho x^{n+m} (\delta_\sigma H^h_{j\cdot i})_{\cdot\rho};$$
$$в)\ L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{jn+i} = \partial_{ji}\xi^h - \partial_\sigma \xi^h H^\sigma_{j\cdot i} + \partial_j \xi^\sigma H^h_{\sigma\cdot i} + \partial_i \xi^\sigma H^h_{j\cdot i} +$$
$$+H^h_{j\cdot i\cdot\sigma}\partial_m \xi^\sigma x^{n+m} + \xi^\sigma \partial_\sigma H^h_{j\cdot i};$$
$$г)\ L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{j+ni} = \partial^2_{ji}\xi^h - \partial_\sigma \xi^h H^\sigma_{j\cdot i} + \partial_j \xi^\sigma H^h_{\sigma\cdot i} + \partial_i \xi^\sigma H^h_{j\cdot\sigma} +$$
$$+H^h_{j\cdot i\cdot\sigma}\partial_m \xi^\sigma x^{n+m} + \xi^\sigma \partial_\sigma H^h_{j\cdot i}.$$

В равенствах *b*) $\delta_\sigma = \dfrac{\partial}{\partial x^\sigma} - H^\tau_\sigma \dfrac{\partial}{\partial x^{n+\tau}}\ (\sigma,\tau = \overline{1,n})$. Проведя преобразования в правых частях равенств *a*), *b*), *c*), *d*), запишем их в виде

$$а)\ L_{X^c}\Gamma^h_{ji} = (L_{X^c}H^h_j)_{\cdot i};\quad б)\quad L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{ji} = \partial_\rho(L_{X^c}H^h_{j\cdot i})x^{n+\rho} -$$
$$-(L_{X^c}H^m_\rho)H^h_{j\cdot i\cdot m}x^{n+\rho} + (L_{X^c}H^h_{j\cdot i\cdot m})H^m_\rho x^{n+\rho};$$
$$в)\ L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{jn+i} = (L_{X^c}H^h_j)_{\cdot i};\ г)\ L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{j+ni} = (L_{X^c}H^h_j)_{\cdot i}.$$

Так как по условию инфинитезимальное преобразование $X = \xi^i(x^1,\cdots,x^n)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ оставляет инвариантным нелинейную связность $\overline{\nabla}$, то $L_{X^c}H^h_j = 0$. Из условия $L_{X^c}H^h_j = 0$ следует, что $L_{X^c}H^h_{j\cdot i} = 0$, $L_{X^c}H^h_{j\cdot i\cdot m} = 0$. Но тогда из пунктов *а*), *б*), *в*), *г*) получим, что

$$L_{X^c}\Gamma^h_{ji} = L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{ji} = L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{jn+i} = L_{X^c}\Gamma^{n+h}_{jn+i} = 0.$$

При остальных значениях индексов *A, B, C* производная Ли $L_{X^c}\Gamma^A_{BC} = 0$ без условия того, что векторное поле *X* оставляет инвариантным нелинейную связность $\overline{\nabla}$. Таким образом, $L_{X^c}\Gamma^A_{BC} = 0$, векторное поле $X^C$ является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве (*T*(*M*), *Г*). Теорема доказана.

**_Список литературы_**

1. *Yano K., Isihara S.* Tangent and Cotangent Bundles Differential Geometry. N. Y., 1973.

*N. Nikitin, O. Nikitina*

### Infinitesimal affine transformation of the tangent bundle of space nonlinear connection

It is shown that a complete elevator $X^C$ for infinitesimal transformation $X$ of differentiable manifold $M$ leaves invariant affine connection of tangent bundle *T*(*M*) of space with non-linear connection if and only if the vector field $X$ is the infinitesimal movement in space of non-linear connection.

УДК 514.75

***К. В. Полякова***

*Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград*

## Задание аффинной связности с помощью горизонтальных векторов

Найдены контравариантные уравнения аффинной связности и выражения скобок Ли.

***Ключевые слова***: линейная связность, горизонтальные векторы, ковариантные производные.

Продолжается изучение горизонтальных векторов, начатое в работах [5], [6].

1. *Пфаффовы производные и скобки Ли.* Структурные уравнения расслоения $L(X_m)$ касательных линейных реперов на гладком многообразии $X_m$ имеют вид